Testando LaTeX

Murilouco

May 5, 2021

Questão 26 da Purple Comet! Math Meet.

$$\left(\frac{1}{2^3-1}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3^3-1}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4^3-1}+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{100^3-1}+\frac{1}{2}\right)=\frac{r}{s2^t}$$

Na qual $r, s, t \in \mathbb{N}$, e r, s são ímpares e primos entre si. Encontre $r+s+t$.

Podemos reescrevê-la assim:

$$\prod_{n=2}^{100}\frac{1}{n^3-1}+\frac{1}{2}$$

Transformar em uma única fração:

$$\prod_{n=2}^{100}\frac{1+\frac{1}{2}(n^3-1)}{n^3-1}=\prod_{n=2}^{100}\frac{\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{2}}{n^3-1}=\prod_{n=2}^{100}\frac{1}{2}\cdot\frac{n^3+1}{n^3-1}$$

E fatorar:

$$\prod_{n=2}^{100}\frac{1}{2}\cdot\frac{(n+1)(n^2-n+1)}{(n-1)(n^2+n+1)}$$

Dessa forma, podemos separar em três produtos separados, e resolver cada um individualmente:

$$\left(\prod_{n=2}^{100}\frac{1}{2}\right)\left(\prod_{n=2}^{100}\frac{n+1}{n-1}\right)\left(\prod_{n=2}^{100}\frac{n^2-n+1}{n^2+n+1}\right)$$

O primeiro produto pode muito facilmente ser resolvido. É $\frac{1}{2}$ multiplicado por si mesmo 99 vezes, ou seja: $\left(\frac{1}{2}\right)^{99}$. Se considerarmos uma fórmula geral, de $n = 2$ até $n = k$, o resultado é $\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

O segundo produto, pode ser reduzido de forma simples também, mas primeiro façamos uma fórmula geral, do produto indo de $n = 2$ até $n = k$:

$$\prod_{n=2}^{k} \frac{n+1}{n-1} = \frac{3}{1} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdots \frac{k-2}{k-4} \cdot \frac{k-1}{k-3} \cdot \frac{k}{k-2} \cdot \frac{k+1}{k-1}$$

Note que quase todos os numeradores são cancelados com os denominadores de dois termos depois (ex.: $\frac{4}{2} \cdot \frac{6}{4} = \frac{6}{2}$), sobrando apenas $\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{k}{1} \cdot \frac{k+1}{1} = \frac{k^2+k}{2}$.

Aplicando $k = 100$, temos $k = 5050$, ou, de forma mais fácil de trabalhar no futuro, $k = \frac{1}{2} \cdot 10100$.

O terceiro produto também tem uma redução similar. Assim como os dois primeiros produtos, farei uma fórmula geral indo até $n = k$.

$$\prod_{n=2}^{k} \frac{n^2-n+1}{n^2+n+1} = \frac{3}{7} \cdot \frac{7}{13} \cdot \frac{13}{21} \cdot \ldots \cdot \frac{k^2-k+1}{k^2+k+1}$$

Podemos ver que o denominador do enésimo termo é cancelado com o termo em seguida dele, então os únicos valores que sobram, não podendo ser cancelados com outros é $\frac{3}{1}$ (o primeiro numerador) e $\frac{1}{k^2+k+1}$ (o último denominador). Dessa forma, a fórmula geral para esse produto é $\frac{3}{k^2+k+1}$.

Aplicando $k = 100$, o resultado é $\frac{1}{3367}$.

A razão disso, é que a fórmula para o denominador do enésimo termo d_n é igual ao numerador do proximo termo c_{n+1}:

$$d_n = n^2 + n + 1$$

$$c_n = n^2 - n + 1$$

$$c_{n+1} = (n+1)^2 - (n+1) + 1$$

$$c_{n+1} = n^2 + 2n + 1 - n - 1 + 1$$

$$c_{n+1} = n^2 + n + 1 = d_n$$

Aplicando os valores adquiridos dos três produtos calculados anteriormente, temos que:

$$\left(\prod_{n=2}^{100} \frac{1}{2}\right)\left(\prod_{n=2}^{100} \frac{n+1}{n-1}\right)\left(\prod_{n=2}^{100} \frac{n^2-n+1}{n^2+n+1}\right) = \frac{1}{2^{99}} \cdot \frac{10100}{2} \cdot \frac{1}{3367} = \frac{10100}{3367 \cdot 2^{100}}$$

Porém, ainda não terminamos, pois como foi dito no início, r e s devem ser ímpares e primos entre si. No caso, como o 10100 é um múltiplo de quatro, é possível reescrever ele como $2525 \cdot 2^2$. Com a divisão das potências, o resultado final é:

$$\prod_{n=2}^{100} \frac{1}{n^3-1} + \frac{1}{2} = \frac{2525}{3367 \cdot 2^{98}}$$

Então, podemos ver que o valores r, s, t são respectivamente 2525, 3367 e 98. A soma dos três é igual a 5990, e essa é a resposta da questão.

Também podemos calcular a fórmula geral para qualquer valor k, e não só 100:

$$\prod_{n=2}^{k} \frac{1}{n^3-1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{k-1}} \cdot \frac{k^2+k}{2} \cdot \frac{3}{k^2+k+1} = \frac{3(k^2+k)}{(k^2+k+1)2^k}$$